Wiskunde 3, 2001/2002

Tentamen, augustus 2002

Zet op elk ingeleverd vel duidelijk je eigen naam. **Bladen waarop dit gegeven ontbreekt worden niet nagekeken!** Zet ook op het eerste blad je studentnummer.
De nummers tussen haakjes geven het aantal punten voor die opgave.

$$\text{Cijfer} = 1 + \frac{\text{aantal punten}}{4}.$$

1. Laat het oppervlak S gegeven zijn door de vergelijking $x^2+y^2+2z^2=1$. Zij $f(x,y,z) = xy + z$.

   (a) (4) Bepaal met de methode van Lagrangemultiplicatoren de extremen van f beperkt tot S. N.B.: Doe dit niet zonder Lagrangemultiplicatoren!

   (b) (5) Bepaal de aard van deze extremen met een tweede-orde test.

2. Gegeven is de integraal

$$I = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} y \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x.$$

   (a) (2) Schets het integratiegebied.

   (b) (3) Bereken I (zonder de integratievolgorde te verwisselen).

   (c) (4) Bereken I door verwisseling van de integratievolgorde.

3. Laat $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeven zijn door $F(x,y,z) = (e^{z+y^2}, x^2 z \sin y \cos z, 0)$. Zij S de eenheidsbol gegeven door $x^2+y^2+z^2=1$.

   (a) (3) Toon aan dat $\operatorname{div}(\operatorname{rot} G) = 0$ voor willekeurige (voldoende vaak differentieerbare) $G : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$.

   (b) (3) Bereken $\int\int_S \nabla \times F \cdot \mathrm{d}S$.

   (c) (3) Bereken $\int\int_S (3xy^2, 3x^2y, z^3) \cdot \mathrm{d}S$.

4. Laat $V \subset \mathbb{R}^3$ de verzameling zijn van punten (x,y,z) die voldoen aan $x^2+y^2+z^2 \leq 1$ en $x^2+y^2 \geq \frac{1}{4}$.

   (a) (4) Bereken het volume van V.

   (b) (5) Bereken de oppervlakte van ∂V.